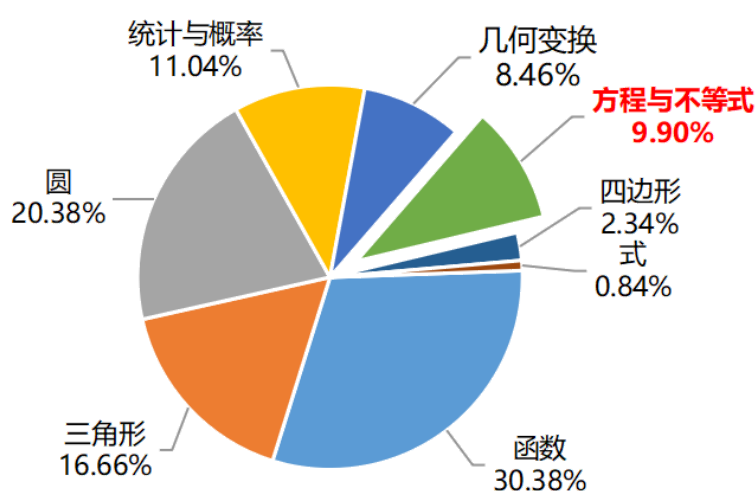


第1讲 一元二次方程的概念及解法

一元二次方程属于人教版教材第二十一章的内容，后续也会与二次函数进行综合。本模块《一元二次方程》，重点包括一元二次方程的解法、根系关系，同时也需要学生在理解概念及解法的基础上，进行实际应用，为后续相关知识的学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为一元二次方程的概念及解法、一元二次方程的判别式和根系关系、一元二次方程的实际应用3讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程的概念	★★	低
一元二次方程的解法	★★	高
一元二次方程的判别式	★★★	高
一元二次方程的根系关系	★★★★	中
一元二次方程的实际应用	★★★★	高

一、一元二次方程的概念

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

一元二次方程的解：使方程左右两边_____的未知数的值就是这个一元二次方程的_____，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的_____。

举个“栗子”

栗子1

1. 下列关于 x 的方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ；② $3(x-9)^2 - (x+1)^2 = 1$ ；③ $x+3 = \frac{2}{x}$ ；④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ ；⑤ $\sqrt{x+1} = x-1$ ，其中一元二次方程的个数是（ ）。
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 下列关于 x 的方程是一元二次方程的是（ ）。
A. $x^2 + 1 = 0$ B. $x + \frac{1}{x} = 1$
C. $ax^2 + bx + c = 0$ D. $(x+1)(x-1) = x^2 + x + 1$
3. 若一元二次方程 $(m-2)x^2 + 3(m^2+15)x + m^2 - 4 = 0$ 的常数项是 0，则 m 的值是_____。

栗子2

4. 一元二次方程 $4x^2 - 1 = 5x$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别为（ ）。
A. 4, -1, 5 B. 4, -5, -1 C. 4, 5, -1 D. 4, -1, -5
5. 一元二次方程 $(x+1)(3x-2) = 10$ 的一般形式是_____。

栗子3

6. 已知 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根，且 $(7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$ ，则 a 的值等于（ ）。
A. -5 B. 5 C. -9 D. 9
7. 关于 x 的方程 $a(x+m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$ (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$)，则方程 $a(x+m+2)^2 + b = 0$ 的解是（ ）。
A. $x_1 = 0, x_2 = 3$ B. $x_1 = -4, x_2 = -1$
C. $x_1 = -4, x_2 = 2$ D. $x_1 = 4, x_2 = 1$

8. 已知方程 $(x-a)(x-3)=0$ 和方程 $x^2-2x-3=0$ 的解相同, 则 $a=$ _____.

|| 独步天下

9. 已知 a 是方程 $x^2-2013x+1=0$ 的一个根, 代数式 $a^2-2012a+\frac{2013}{a^2+1}$ 的值为 _____.

二、一元二次方程的解法

1. 直接开方法

一般地, 对于方程 $x^2=p$

当 $p>0$ 时, 根据平方根的意义, 方程有两个 _____ 的实数根 _____;

当 $p=0$ 时, 方程有两个 _____ 的实数根 _____;

当 $p<0$ 时, 因为对任意实数 x , 都有 $x^2\geq 0$, 所以方程 _____.

🗣 举个“栗”子

|| 栗子4

10. 关于 x 的一元二次方程 $(x-k)^2+k=0$, 当 $k>0$ 时的解为 ().

A. $k+\sqrt{k}$

B. $k-\sqrt{k}$

C. $k\pm\sqrt{k}$

D. 无实数根

11. 解方程: $x^2-49=0$.

12. 解下列方程

$$4(x+1)^2=25.$$

13. 解方程.

$$(x+1)^2=(1-2x)^2.$$

2. 配方法

知识回顾:

1. 完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

2. 试填空: $x^2+6x+9=(x+ \underline{\hspace{1cm}})^2$, $x^2-4x+ \underline{\hspace{1cm}}=(x-2)^2$.

解方程： $5x^2 = 6x + 8$.

解题步骤：

①移项：把方程中含有未知数的项移到方程的____边，常数项移到方程的____边；

②二次项系数化为____：根据等式的性质把二次项的系数化为____；

③配方：把方程两边都加上一____，使左边配成一个完全平方式；

④开平方：运用____解方程 .

①移项，得_____，

②二次项系数化为1：_____，

③配方，得_____，

④开方，得_____，

解得_____ .

举个“栗子”

栗子5

14. 解关于 x 的方程 .

$$x^2 - 6x - 2 = 0 . \text{ (用配方法)}$$

15. 解下列方程：

$$x^2 + 3 = 2\sqrt{3}x .$$

16. 用配方法解方程： $3x^2 - 3 = 2x$.

3. 公式法

一元二次方程的求根公式是由配方法演变而来：

用配方法解方程： $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)

解：移项，得_____

二次项系数化为1，得_____

配方，得_____

即_____①

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2$ _____ 0 . 式子 $b^2 - 4ac$ 的值有以下三种情况：

(1) $b^2 - 4ac > 0$,

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$, 由①得_____

方程有两个不等的实数根_____

(2) $b^2 - 4ac = 0$,

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, 由①可知方程有两个相等的实数根_____

(2) $b^2 - 4ac = 0$,

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, 由①可知方程有两个相等的实数根_____

(3) $b^2 - 4ac < 0$,

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$, 即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ _____ 0 ,

而 x 取任何实数都不能使 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$. 因此方程_____ .

! 总结

1. 式子 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式, 通常用希腊字母“_____”表示它, 即_____ .

2. 当_____ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为_____ 的形式, 这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的_____ .

🍌 举个“栗”子

栗子6

17. 解方程: $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

18. 解下列方程:

$$4x^2 - 3x = x + 1 .$$

4. 因式分解法

解一元二次方程时, 先_____, 使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式, 再使这两个一次式分别等于 0, 从而实现_____, 这种解一元二次方程的方法叫做**因式分解法** .

因式分解法的根据: 如果两个因式的乘积等于 0, 那么这两个因式_____ 为 0, 反过来, 如果两个因式中有一个因式为 0, 那么它们之积为 0, 即 $ab = 0$, 则_____ 或 _____ 或 _____

例如: $(2x - 1)(3 - x) = 0$, 则_____ 或 _____, 从而可得到方程的解 .

! 总结

(1) 解一元二次方程的**思想方法**: _____

(2) 因式分解法的一般**步骤**:

①将方程化为一元二次方程的一般形式;

②把方程的左边分解为两个_____;

③令每个因式为_____, 得到两个一元一次方程;

④解这两个一元一次方程得原方程的解 .



举个“栗”子

栗子7

19. 方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的解为 () .

A. $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

B. $x_1 = 2$, $x_2 = -6$

C. $x_1 = -2$, $x_2 = 6$

D. $x_1 = -2$, $x_2 = -6$

20. 解下列方程：

(1) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

(2) $3(x - 5)^2 = 2(5 - x)$.

21. 解方程 .

(1) $(x - 1)(x + 3) = 12$.

(2) $(x - 3)^2 + 4x(x - 3) = 0$.

22. 解下列一元二次方程 .

(1) $x(2x - 5) = 4x - 10$.

(2) $(x - 4)^2 = 9(5 - 2x)^2$.